

## Глава 2. Предварительный анализ задачи

В решении любой проблемы участвуют двое – «Решающий задачу» и сама задача. Первый характеризуется интеллектуальным и психологическим потенциалом, каковой должен быть настроен на задачу с учетом ее сложности, и специфики. Второй участник – задача характеризуется интеллектуальной сложностью, и объемом знания необходимого для поиска решения.

Эти двое – Решающий и Задача существуют в тесной взаимосвязи и их взаимоотношения являются ключевыми для построения метода поиска решения. Это обстоятельство мы будем иметь ввиду в дальнейших рассуждениях. Проблема второй главы – как «Решающий задачу» формирует условие поставленной перед ним проблемы. Я несколько не оговорился. На старте поиска решения, как правило, нет полного, исчерпывающего условия задачи. И на самом деле точное условие задачи возможно только в школьном или вузовском учебнике. В классически построенном учебнике задача ставит своей целью закрепление изученной теории, поэтому уже в условии задачи содержится решение в виде косвенного или даже прямого указания на используемые методы. Реальная же задача, всегда содержит долю неопределенности в ответе на главный вопрос – что же требуется от Решающего на самом деле.

Итак, что представляет собой реальное условие? Каковы его проблемы? Как минимум его текст может быть выражен в терминах непосредственно непригодных для поиска решения. Хороший пример такой ситуации – задачи физики. Физические проблемы можно описать терминами, описывающими физические процессы и явления, но мы ведь хорошо знаем, что задачи из области физики решаются методами математики, поэтому содержательное физическое описание, хорошо для понимания, но требуется еще перевод в грамотную математическую терминологию, без которой нельзя начать использовать подходящий математический аппарат.

И терминологические проблемы не единственные. На самом деле «Решающий задачу» столкнется с некоторым объемом недоопределенных условий и на этом этапе возникает главная недоговоренность – а решается ли задача вообще, что совершенно не факт. В традиционных учебниках этой проблемы нет. Если задача сформулирована, то она очевидно разрешима в полной мере, и важнейший элемент стартового исследования упускается полностью.

### Проблема разрешимости

Еще раз отметим, что задачи из привычного учебника разрешимы по определению, и не просто разрешимы, а для них существует эффективный метод решения, что создает ошибочное ожидание, что такова норма в постановке задачи. На самом деле, мы очень часто имеем дело с задачей как минимум не решаемой наиболее эффективными методами. Например, для алгебраических уравнений степени выше четвертой, нет формул в радикалах. Зачастую интегралы нельзя выразить в виде известных, простых функций, и эта проблема переходит на решение дифференциальных уравнений.

В механике нет простого и явного ответа на очень многие вопросы. Такова задача расчета траектории движения многих тел в поле взаимного тяготения. Достаточно часто возможно только приближенное решение, так как физические модели чего бы-то ни было верны только в некотором приближении. Например, закон Гука, описывающий силу упругого взаимодействия, опирается на качество вещества, называемого упругостью, сохраняющего свои параметры лишь в очень ограниченном интервале величин сил воздействия.

Невозможность количественного решения в явном виде мы научились обходить с помощью численных методов. Но и это еще не все. Есть еще фактор времени, способный сказать свое «нет», уже после того, как «Решающий задачу» найдет метод, хотя бы из области вычислительной математики. Может так оказаться, что время на получение решения настолько велико, что предложенный способ не имеет смысла.

В качестве примера можно привести задачу факторизации – поиск множителей числа. Принципиально задача решается очень просто – достаточно просмотреть все числа, претендующие на роль делителя, и проверить возможность делимости. Это будет работать с небольшими числами. Но, например, для числа состоящего из 100 знаков потребуются перебрать все числа от 2 до числа с 50-ю знаками, что потребует слишком большого времени, делающего вычисления бессмысленными. Этот пример показывает, что «Решающий задачу» ограничен по времени. У него нет возможности искать и проверять возникающие идеи бесконечно долго и нет смысла в методе, если тот потребует слишком много времени для ответа. Из сказанного следует, что косвенно в условие задачи должно входить описание ресурсов в частности времени которое «Решающий задачу» может потратить на свои поиски. Кстати заметим, что ведь и школьная контрольная работа не длится сколь угодно долго.

Таким образом, проблема разрешимости требует ответа на два вопроса. Первый – можем ли мы в принципе найти решение, на этот вопрос ответ чаще всего удовлетворительный. Второй вопрос более значим – имеем ли мы достаточно ресурсов для поиска метода решения и для получения окончательного ответа найденным методом.

Проблема разрешимости встает в полный рост и там, где не требуется что-либо посчитать. Существуют целые классы задач, в которых необходимо выяснить истинность какого-либо утверждения, или найти объект с заданными свойствами или хотя бы выяснить существует ли такой объект. В качестве примера объекта с заданными свойствами можно привести классическую комбинаторную задачу: Дана куча камней, необходимо раскидать их на две кучи так, чтобы разность весов между ними была минимальна. Эта задача требует полного перебора вариантов раскладки камней, которых даже при 100 камнях, оказывается необозримо много, а значит при принципиальной разрешимости, эта задача предъявляет нереальные требования к времени счета.

Если же требуется выяснить истинность некоторого суждения, то может так получиться, что очень большой объем множества на котором выполняется поиск не является решающим фактором. Хороший пример: возьмем город-мегаполис, в котором живет более десяти миллионов человек. Вопрос такой – есть ли в этом городе хотя бы два человека с одинаковым числом волос на голове. Задача кажется неразрешимой технически, так как требуется пересчитать количество волос на головах, если не всех, то во всяком случае значительного числа жителей (до обнаружения такой пары), что сложно сделать даже в отношении одного человека. Однако если мы знаем, что количество волос на голове любого человека не превышает, например, 10 миллионов (а это так), то очевидно такая пара жителей есть, это нам говорит простое умозаключение. Этот пример говорит о том, что для проверки истинности утверждения иногда достаточно средств логического вывода, не требующих больших ресурсов, даже при кажущейся необъятности задачи.

## **Два типа разрешимости**

Таким образом, анализ разрешимости задачи дает два класса задач и соответственно два типа разрешимости. Первый тип относится к устройству нашего мира, пусть даже локально, в небольшой области знания. Это вопросы о том, - существует ли нечто обладающее ожидаемыми свойствами или как устроено что-то в этом мире. Ответы на такие вопросы имеют категорическую форму. Конечно или бесконечно Вселенная, имеет или нет наша планета форму диска, и стоит ли она на слонах, сколько должно быть

электронов в нейтральном атоме, существуют ли корни у данного уравнения, можно ли купить яблоки в этом магазине. Характерное свойство всех перечисленных вопросов в том, что ни один из них не допускает примерного ответа. Такие задачи можно определить как задачи существования – существует ли нечто обладающее заданными свойствами и если да, то возможен вопрос, как найти хотя бы один экземпляр такого объекта. Или объект дан – и требуется выяснить, есть ли у него набор заданных свойств. Этот тип задач допускает прямое решение в форме поиска объекта с данными свойствами или прямой проверки наличных качеств. Как уже сказано, не всегда это возможно за разумное время, но на этот случай есть средства логического вывода, способные спасти ситуацию.

Если же решаемая задача не есть задача существования и в ней требуется найти или создать объект с заданными качествами, то это второй тип проблемы разрешимости. И это уже о том, насколько мы готовы поступиться качеством решения и какими ресурсами располагает «Решающий задачу» без школярской уверенности в ее разрешимости за определенное количество минут.

Разумеется, мы не предполагаем в «Решающем задачу» способности к глубокому анализу условия, так как такой анализ, возможно, окажется сложнее самой задачи. Но все же некоторую работу в этом направлении провести он может и должен.

Во-первых, он может поискать прецеденты в своей памяти. Не занимался ли он уже подобной проблемой и каков был результат. Если да, занимался, и достаточно хорошее решение было получено, то есть шанс и сейчас. Он может попробовать выяснить, не занимался ли похожей проблемой кто-либо с таким же как у него уровнем образования и интеллекта. Например, ученик занимается в авиамodelьном кружке построением модели самолета. И в мастерской стоят модели похожие по своим качествам на его личную цель, и он знает, что эти модели построили ученики такого же возраста. У них получилось, значит должно получиться и у него.

Во-вторых, он может оценить уровень своих личных знаний в этой области и их достаточность. Зачастую, правда, это приходится делать с помощью более знающего человека, но есть и несложный личностный критерий. Можно задать себе вопрос – хорошо ли я представляю себе область знаний, из которой взята задача? Для этого достаточно пройти по терминам, используемым в описании задачи и посмотреть, понятен ли их смысл. Конечно, такой контроль знаний не гарантирует успешности решения задачи, но его неудача точно означает необходимость в дополнительных образовательных усилиях.

В третьих, необходимо понять в какой области знания требуется работать. Например, поставлена задача на поиск элементов треугольника, тогда необходимы знания о свойствах треугольника, если они есть – это хорошая ситуация, располагающая к успеху. Плохая ситуация – известно, что означают используемые термины в силу общего знания геометрии, но нет никакого знания свойств треугольников, тогда шансы на поиск решения минимальны, и необходимо заняться расширением набора своих знаний и навыков.

## **Уточнение условия**

Итак, «Решающий задачу» получил некоторую уверенность в своих возможностях. Следующий шаг в уточнении условия задачи состоит в понимании того, что требуется как конечный результат. Это не всегда очевидно. Простой пример. Дано уравнение – необходимо определить его корни. К этому условию можно предъявить целый ряд претензий. Что значит найти корни? Во-первых, корни принадлежат к определенному виду чисел. Если это уравнение Диофанта, то необходимо уточнить, что корни – это целые числа и только целые. Если уравнение алгебраическое, то корни могут быть действительными и комплексными. Что же требуется? Все возможные корни или только один их тип. Есть достаточно много видов уравнений имеющих бесконечно много корней,

тогда требование найти корни необходимо уточнить дополнительным условием – в каком виде их записывать. Если вдумчиво подойти к изучению условия то такие вопросы, - что же на самом деле означают используемые термины и что требуется от решения, обязательно появятся.

Еще один важный момент касается качества решения. Вернемся к комбинаторной задаче о раскладке кучи камней на две, с минимальной разностью в весе. Кстати эта задача хороший пример переформулировки условия. Здесь допустимо отвлечься от камней и операций над ними и сказать, что необходимо найти комбинаторную структуру называемую сочетанием, удовлетворяющую заданному условию, а именно сумма чисел в сочетании должна иметь наименьшую разность с суммой чисел, не вошедших в сочетание. Такое изменение условия позволит воспользоваться стандартным алгоритмом построения сочетаний, и покажет, что уже при 100 числах (камнях), что немного, общее число сочетаний равно  $2^{100}$ , что и делает поиск решения бессмысленным.

Но если в качестве дополнительного условия к задаче положить, что нам нет необходимости в идеальном решении, то можно реализовать следующий алгоритм:

```
Выстроим ряд камней в порядке возрастания
Обе искомые кучи камней пока пусты
Для всех камней ряда делать
    Выкладываем очередной камень в кучу меньшего веса
```

Нетрудно показать, что есть случаи, когда этот алгоритм дает идеальный результат, и много ситуаций, когда результат окажется достаточно неплохим. Идеального решения он не гарантирует, но полученного качества будет вполне достаточно.

Еще одно важное уточнение условий задачи касается большого количества задач физики и химии. Допустим, необходимо провести анализ какого-либо процесса. Как в физических, так и в химических, вообще в любых процессах идущих в материальном мире существенно важно описать среду, в которой идет процесс. Простой пример – если речь идет о волновом движении, например звука, то без описания среды, такая задача просто не имеет смысла.

Вопрос об условиях достаточно сложен. Не всегда и не все необходимо учитывать. Например, как ни странно, но основные законы термодинамики газов не зависят от устройства молекулы газа и разные газы в этом отношении ведут себя одинаково. Но всегда необходимо подумать вот о чем - помимо основных параметров задачи, существует ряд дополнительных факторов влияющих на анализ и поиск решения, и необходим их анализ на предмет того, какой эти факторы вносят вклад в общую проблему, и насколько их необходимо учитывать.

Для предельно точного понимания условия задачи требуется ясность используемых понятий. Даже в простых, как может показаться, формулировках встречаются нюансы, понимание которых, изменяет задачу. К примеру, в физических процессах мы иногда говорим о действии силы на тело, но зачастую речь идет о взаимодействии между телами. Действие и взаимодействие - далеко не одно и то же. Два примера для иллюстрации. Первый пример - электрон находится во внешнем поле с заданной напряженностью. Мы рассчитываем поведение электрона исходя из того, что поле постоянно. Это случай воздействия.

Второй пример – два или более тел, сопоставимой массы движутся в поле взаимного тяготения. Это принципиально иная ситуация. В случае с электроном речь идет о постоянном поле, и мы имеем возможность не учитывать взаимодействие электрона с источником поля. Во второй ситуации такой возможности нет. Тела, двигаясь под воздействием друг друга, изменяют взаимное положение, в результате чего изменяется и поле тяготения, следовательно, изменяются силы действующие на тела. В результате,

решение второй задачи приводит к сложной системе дифференциальных уравнений, а в первом случае можно записать явную функцию зависимости координат электрона от времени. Таково отличие силы действия от силы взаимодействия. Согласитесь, что разница более чем значительна.

Еще один классический пример, который необходимо специально разъяснять школьникам, начинающим изучать законы механики - это различие между весом и массой. Первое это сила, возникающая из взаимодействия тела с Землей, второе – собственная характеристика тела независимая от внешних факторов. Это принципиальное различие зачастую не понимаемое на интуитивном уровне.

Три примера, приведенные выше показывают, что слова разговорной речи и строгие понятия, взятые из определенной области знания, могут иметь принципиально различное содержание. Слово – указывает на объект и зачастую не более того. Понятие увязывает объект с областью знания, таким образом, точно определенное понятие включает в себе ключевую информацию которую возможно и необходимо использовать в поиске решения.

## **Сформулируем основные выводы**

Условие реальной задачи достаточно часто, если не всегда сформулировано неточно, его можно воспринимать как некий разговорный текст, указывающий на существование проблемы подлежащей решению. Отсюда следует цель предварительного анализа задачи заключающаяся в переводе условия из разговорной, неточной языковой формы в строгий текст, построенный на точно определенных понятиях. Для того, чтобы выполнить эту работу от Решающего задачу уже потребуются хорошее владение понятийным аппаратом используемой области знания, владение им можно признать необходимым условием осмысленности последующей работы.

Таковой перевод должен дать точное и уже не интуитивное понимание того, что следует достигнуть. Описание условия задачи с использованием хорошего понятийного аппарата позволит ответить на первый вопрос, который в решении традиционных учебных задач совершенно опускается – это вопрос разрешимости. Разрешимости принципиальной и разрешимости с приемлемым качеством ответа.

Более того, понятия, используемые в точной формулировке условия, не существуют сами по себе. Они указывают на область знания, в которой возможно содержится решение. В этом смысле можно сказать, что правильная постановка задачи неявно содержит указание на ее решение и дает возможность перейти к следующему этапу анализа задачи – построения локальной, необходимой для поиска решения картины знания.