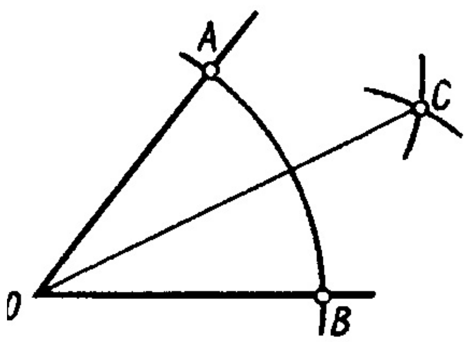
Трисекция угла

Есть такая стандартная геометрическая задача – разбиение угла на две равных части с помощью циркуля и линейки. Решается она просто. Читайте и смотрите на рисунок.



Проводим циркулем окружность достаточно большого радиуса с центром в вершине угла. Эта окружность пересекается с лучами, ограничивающими угол в двух точках. Затем последовательно прорисовываем две окружности одинакового радиуса, но одна окружность имеет центр в одной точке пересечения, другая имеет центр в точке пересечения с другим лучом. Радиус подбираем так, чтобы эти две окружности пересекались. Затем точку пересечения окружностей соединяем с вершиной угла и можете поверить на слово, полученный луч делит исходный угол пополам. Впрочем это несложно и доказать.

Теперь, окрыленные успехом, попробуем найти метод деления угла на три равные части. И вот здесь уже ничего не получается. Трисекция угла, так называется эта задача – есть одна из трех неразрешимых задач древности, наряду с квадратурой круга и удвоением куба.

Французский математик П. Ванцель в 1837 г. первым строго доказал, что невозможно осуществить трисекцию циркулем и линейкой. Пусть b = a/3. По известной формуле, cos(a) = = 4cos^3 (b) - 3cos(b). Тогда для величины x = 2cos(b) получается уравнение $x^3 – 3x - a = 0,$ где a = 2cos(a) . Геометрическая задача трисекции данного угла a циркулем и линейкой разрешима тогда и только тогда, когда полученное алгебраическое уравнение разрешимо в квадратных радикалах. Возьмём, например, a = 60°. Тогда уравнение примет вид $x^3 – 3x$ - 1 = 0. Оно неразрешимо в квадратных радикалах, а потому и трисекция с помощью циркуля и линейки в данном случае невозможна. Тем более она невозможна в общем случае. Интересно, что вообще для углов вида 360°/n с целым n трисекцию удаётся осуществить тогда и только тогда, когда n не делится на 3.

Но задача вполне решаема, если отказаться от минимального набора: циркуля и линейки и использовать более сложные средства, такие которые не могли быть известны древним грекам. Вот как об этом пишет европейский математик Папп

«Когда древние геометры стремились разделить данный угол с прямолинейными сторонами на три равные части, они не смогли этого сделать по следующей причине. Мы говорим, что в геометрии есть три вида задач, это так называемые “плоские’’, “телесные’’ и “линейные’’ задачи. Те, которые могут быть решены с помощью прямой линии и окружности, называются “плоскими’’, поскольку линии, с помощью которых такие задачи решаются, плоские. Те задачи, которые решаются с использованием одного или нескольких конических сечений, называются “телесными’’ задачами. Для их решения необходимо использовать поверхности геометрических тел, то есть конусов. Остаются задачи третьего типа, так называемые “криволинейные’’ задачи. Для построения в этих случаях требуются другие кривые, отличные от уже упомянутых, имеющие более разнообразное и динамическое происхождение и возникающие из более неправильных поверхностей и сложных движений. Такой вид имеют кривые, обнаруженные в так называемой “surface loci’’ (геометрическом месте точек поверхности), и многие другие, даже еще более сложные… Эти кривые имеют много замечательных свойств. Более поздние авторы рассмотрели некоторые из них, достойные более глубокого изучения, и одну из таких кривых Менелай назвал “парадоксальной’’. Другие кривые того же типа – это спирали, квадратрисы, конхоиды и циссоиды… Поскольку задачи отличаются таким образом, ранние геометры были не в состоянии решить вышеупомянутую задачу о делении угла, потому что она по природе своей телесная, ибо они еще не были знакомы с коническими сечениями, и по этой причине пребывали в растерянности.»