

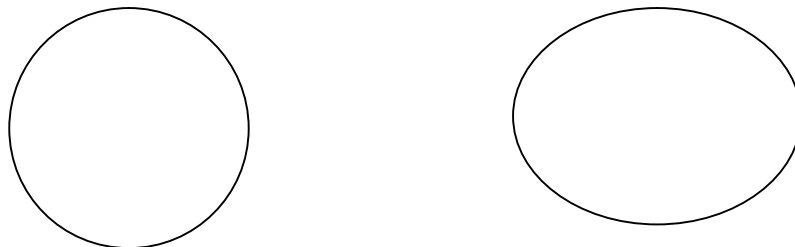
Гипотеза Пуанкаре

Если кратко, то можно сказать как в Википедии: В 1900 году Пуанкаре высказал предположение, что трёхмерное многообразие со всеми группами гомологий как у сферы гомеоморфно сфере. Попытки доказать гипотезу Пуанкаре привели к многочисленным продвижениям в топологии многообразий. Но, наверное, это малопонятно. Попробуем разобраться в терминах на уровне доступном нам - простым смертным.

Что такое топология

Начнем с того, что указанная гипотеза относится к области топологии. Следовательно, придется потратить немного времени, чтобы понять о чем эта наука. Прежде давайте вспомним, что такое геометрия. Геометрия - это наука о свойствах пространства. Но это определение как-то не слишком информативно. Скажем более определенно – геометрия это наука о свойствах геометрических объектов. Например, равенство 180-ти градусам суммы всех углов плоского треугольника – это геометрическое свойство. Тот факт, что квадрат гипотенузы в прямоугольном треугольнике равен сумме квадратов катетов этого же прямоугольного треугольника - свойство называемое теоремой Пифагора. Есть свойства пространственных фигур, например равноудаленность точек поверхности от центра – есть геометрическое свойство сферы и т.д.

Названные примеры, можно считать свойствами лишь до тех пор, пока фигура не изменена какой-либо деформацией. Например, длина окружности равна $2\pi R$ где R – ее радиус. Но если мы окружность немного сплющим, вот так:

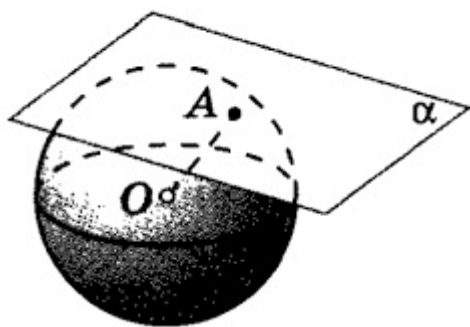


то длину полученной линии уже нельзя считать по указанной формуле. Это означает, что различные преобразования изменяют свойства геометрических объектов. Возникает важный вопрос. А есть ли такие свойства и такие преобразования, которые этих свойств не меняют. Вообще ответ отрицательный. Если мы допустим применение ножниц, то изменить можно любое свойство, любой фигуры. Трудно предположить, что найдется, что-либо способное устоять перед возможностью отрезать и выбросить часть фигуры. Но если запретить такие слишком разрушительные способы изменения фигур, то ситуация станет более интересной. Топология решила запретить два таких преобразования: склейку частей объекта и его разрезания. Все остальное возможно: сжатия хоть в точку, растяжения хоть до бесконечности, скручивания, в общем, все, что может придумать ваша фантазия без ножниц и клея. И вот все свойства способные устоять в процессе таких преобразований и есть предмет топологии.

Разберем используемые термины

Начнем разбирать на понятные кусочки гипотезу Пуанкаре. И для начала поймем, **ЧТО ТАКОЕ МНОГООБРАЗИЕ**.

Термин отнюдь не означает большого выбора из предметов. Если привести его точное определение, то придется популярно объяснять еще целую группу терминов, а для объяснения их появятся новые, столь же непонятные слова. В общем, придется изложить целиком всю топологию. Поэтому обратимся к интуиции. Все понимают, что такое пространство. Напомню только некоторые его неочевидные свойства. Например, если вы



находитесь в точке A , то назвать самую близкую к A точку нельзя. Между любой точкой B и вашей точкой A всегда можно найти еще одну. Это свойство называется непрерывностью. Еще, какую бы маленькую область пространства вы не взяли, в ней всегда можно обнаружить бесконечно много точек. Это в какой-то степени следствие непрерывности. Квалифицированные математики, наверное, смогут указать еще что-то, я этим ограничусь.

Отметим, что наше пространство называется Евклидовым. Так вот **многообразие** – это такое пространство, которое в небольшой окрестности вокруг каждой своей точки имеет свойство евклидоваго. Еще замечу, что быть евклидовым в окрестности точки и быть евклидовым вообще это не одно и то же. Простой пример – человек находящийся в любой точке планеты Земля может с уверенностью сказать, что Земля вокруг него похожа на плоскость, а в целом Земля – это шар. Вообще-то понятие многообразия конечно сложнее, но для дальнейших рассуждений, такое усеченное понимание полезно.

Следующий термин – ГОМОЛОГИЯ. Или точнее группа гомологий. Иногда в многообразии можно выделить группу объектов – одной природы (то есть чем-то похожих), таких, что их набор, и они сами не изменяются при топологических преобразованиях. Например, если мы возьмем куб, то его набор вершин при любых деформациях все равно будет содержать 8 точек. И они все равно будут оставаться точками, хотя бы куб уже будет и совсем не куб. Говорят, что эти группы объектов являются топологическими инвариантами, то есть вещами не изменяемыми в любых преобразованиях без клея и ножниц.

Что такое ГОМЕОМОРФИЗМ. Если говорят, что две геометрических фигуры или тела гомеоморфны, то это означает, что они одинаковы, но в особом топологическом смысле. Это надо пояснить особо. Что имеется ввиду, когда говорится, что два прямоугольника равны? Равенство прямоугольников, треугольников, кругов и т.д.



означает, что мы можем взять один из них и перенести его так, что он совпадет с другим. Еще можно сказать, что две равные фигуры это одинаковые фигуры с точки зрения

переноса. Гомеоморфизм – топологическое понятие. Гомеоморфные фигуры равны, в том смысле что одну из них можно получить из другой: скручивая, сжимая, растягивая, в общем уродуя её всяко, но без клея и ножниц. Простой пример тел не гомеоморфных, это шар и бублик. Чтобы шар превратить в бублик на каком-то этапе в нем надо ножницами сделать дырку, то есть выполнить запрещенное топологическое преобразование.

А теперь сформулируем гипотезу Пуанкаре, еще раз, но уже нормальным человеческим языком:

Если есть некий пространственный объект и все его инварианты, сохраняющиеся при топологических преобразованиях такие же, как и у сферы, то его можно преобразовать в сферу, не используя ножниц и клея.

Вот собственно и все. Но для математиков это колоссально много. Для них гипотезой Пуанкаре формулируется фундаментальное свойство пространства. Теперь, после Перельмана математику чтобы выяснить относительно конкретного объекта, равен он сфере или нет, не надо перебирать все возможные преобразования, а достаточно выделить инварианты и сравнить их набор с инвариантами сферы. Это настолько важно, что проблема была названа задачей тысячелетия. Впрочем, наверное, в этом титуле есть очень сильная эмоциональная окраска, не имеющая отношения к науке.