Математическая теория игр

Сразу хочу сказать, что не надо ожидать от математической теории исчерпывающих ответов. Любая математическая теория изучает не реально существующий объект, а его формализованную модель. Поэтому на самом деле всегда остается вопрос, насколько этот формализованный объект соответствует действительности. Поясню мысль на некоторых простых примерах.

Пример первый. Закон всемирного тяготения. Он описывается простой формулой, но чтобы эта формула могла работать, необходимо договориться о некоторых допущениях. Например, что масса тела, являющегося причиной притяжения, сосредоточена в точке. Это, конечно, не соответствует действительности, но если расстояние между телами намного больше линейных размеров тел, то можно в рамках допустимой погрешности предположить, что их масса точечная. Это неверное предположение не влияет на расчеты для удаленных тел. Если же мы рассматриваем притяжение Луны и Земли, то ситуация резко усложняется и необходимо учитывать распределение масс, наличие океанов, гор и т.д.

Пример второй. Гидродинамика (теория движения жидкостей). Любая жидкость состоит из молекул, но классическая гидродинамика предполагает, что это непрерывная субстанция.

Пример третий. Электрический ток. Мы все знаем, что ток – это движение заряженных частиц. Но в законах электрического тока нет ионов и электронов, а есть напряжение, сила тока, сопротивление, некоторые другие величины, для определения численного значения которых, их природа не интересна. Теория электрического тока для решения своих задач вполне справляется без электронов, хотя знание об их существовании полезно для общего понимания.

Основные понятия теории вероятностей

Их два: событие и вероятность. Событие – это то, что может произойти. Вероятность – это величина, которая говорит, насколько ожидаемо это событие. Началась теория вероятностей, с простой игры, и я буду использовать ее для пояснения базовых понятий. Эта игра заключается в подбрасывании монетки, и попытки угадать что выпадет, орел или решка. Само подбрасывание монетки называется испытанием, а возможных событий здесь два: выпал орел и выпала решка.

Теперь вопрос. Как решить насколько ожидаемы эти два события. И вот в этом исключительно важном вопросе математика ровным счетом ничего сказать не может. Вопрос ожидания необходимо решать из каких-то других соображений. Например, можно провести анализ формы монеты, распределения веса и т.д. Математика дает только один совет. Если у вас нет оснований полагать, что одно событие более ожидаемо, нежели другое, то их вероятности следует считать равными. Сказанное конечно тавтология, но что имеем, то имеем. Итак, вероятности равны, осталось определить конкретное число.

Этот вопрос теория решает так. Для любого испытания есть достоверное событие, которое заключается в том, что произошло одно из вероятных. В нашей простой игре достоверное событие заключается в том, что, либо выпал орел, либо выпала решка. Вероятность достоверного события принимается равной 1. А значит на два равновероятных приходится по ½. Если события, составляющие достоверное не равновероятны, то их сумма все равно должна быть равна 1. Это пока все, что нам нужно знать о теории вероятностей. И теперь можно заняться теорией игр.

Простейшая модель игры

Вообще, любая игра от самой простейшей вроде «орел или решка», до сложнейших вроде Шахмат и Го - это процесс принятия решений в условиях неопределенности. Мы не знаем, что предпримет наш противник и в этом заключается проблема. В игре «орел или решка» наш противник природа, в шахматах человек или компьютер, но для теории это не суть важно. Существенно лишь то, что мы не знаем наверняка, что предпримет оппонент, но решение принимать необходимо.

А теперь, для удобства дальнейших рассуждений, придумаем некую абстрактную игру. Ее правила, какими фигурами ведется игра и фигурами ли, нас не интересует. Известно лишь, то, что есть два игрока. Будем называть их «Игрок» и «Противник». Они принимают решения, в результате которых несут потери или что-то приобретают. Давайте мы будем Игроком и в первую очередь решим, о чем будем думать, о потерях или о приобретениях. Если о потерях, то наша игровая задача, будет называться задачей минимизации потерь. Если о приобретениях, то наша игровая задача будет называться, задачей максимизации выигрыша.

Для начала решим, какая из этих двух задач более разумна. Вернемся на время к реальным играм. Как известно, в многочисленных шахматных играх или например Го, первый игрок имеет некоторый перевес, в силу своего первого хода. Однако этот перевес настолько невелик, что не дает безусловного преимущества первому игроку. В Рэндзю перевес в один ход, дает практически гарантированную победу (без учета правил фола), поэтому в этой игре для первого игрока некоторые типы ходов объявлены запретными. То есть, ситуация в которой, игра одному из игроков дает решающее преимущество не интересна. И в реальных играх разумно предположить, что Игрок и Противник имеют равные шансы. Иное уничтожает любые попытки создать теорию игры, она будет просто не нужна.

Итак, есть смысл постановить, что наша абстрактная игра предоставляет Игроку и Противнику равные шансы. Еще один важный вопрос заключается в том, какой игры ожидать от противника. Если мы предположим, что он будет играть слабее Игрока, есть ли смысл Игроку делать свою игру спустя рукава? Очевидно нет. Если Противник будет играть сильнее Игрока, Игроку опять есть смысл играть только максимально сильно. И, наконец, если силы окажутся равны, то и в этом случае Игрок должен играть как можно более сильно.

Таким образом, разумно предположить, что Игра дает участникам равные шансы и оба они играют на максимуме своих возможностей. Исходя из этих двух предположений можно сделать вывод о выборе между задачами максимизации выигрыша и минимизации потерь.

А именно, при равных шансах и равной игре выигрыша не может быть, а для сведения игры к ничьей достаточно минимизировать потери. Теоретически (опять таки исходя из равной игры) их можно свести к нулю на каждом ходе, а это и есть ничья. Вопрос, имеет ли смысл при таких предположениях создавать какую-либо теорию?

Ответ положительный. Вернемся к реальным играм, а точнее уровню мастеров. Почему один из них выигрывает? Да потому, что второй допускает решающую ошибку. Это означает, что есть смысл играть максимально сильно на ничью и ждать ошибки соперника. В равной игре повторюсь, ошибка – это единственная причина победы.

Все философские вопросы решены, теперь переходим к созданию формальной модели абстрактной игры.

Пусть каждая игровая ситуация для Игрока допускает два решения. Назовем их решениями А и В. И пусть для Противника также возможно ровно два решения. Назовем их С и Д. Принятие решения обоими игроками, приводит для Игрока к потерям и приобретениям. Выше уже было сказано, что можно максимизировать выигрыш, но можно и минимизировать потери. Мы в дальнейшем будем решать задачу минимизации.

Допустим также, что проанализировав ситуацию после реализации игрового решения Игрок знает свои потери. Оформим их в виде таблицы:

Игрок / Противник	Решение А	Решение В
Решение С	7	4
Решение Д	1	6

На пересечении строки и столбца потери Игрока при условии, что он примет решение этого столбца, а Противник ответит решением, отмеченным в строке. Еще раз заметим, что эта игра не более чем очень сильное упрощение, необходимое для изложения базовых идей теории.

Если про действия противника ничего не известно, то принцип минимакса требует принять решение В, в этом случае максимальные потери, могут составить 6 единиц, в то время, как решение А может привести к потере 7 единиц. Выбираем из двух зол меньшее. Однако такая ситуация о которой ничего не известно, все же не вполне реальна. Почти всегда с определенной долей вероятности мы что-то можем сказать еще.

Например, мы желаем воспользоваться услугами одной из двух транспортных компаний для переезда в другой город, и при этом естественно желаем минимизировать потери своего груза, которые при транспортировке всегда возможны (игра с транспортными компаниями). Возможные последствия это потеря груза или его частичная порча. Оба результата возможны при выборе любой компании. Первичная информация обычно небогата. Но мы может найти Интернет – форум, собирающий отзывы о компаниях, и на базе отзывов вычислить возможные вероятности. Например есть 10 отзывов о компании А и из них 3 сообщают о порче своего груза. Это сразу дает нам возможность оценить свой риск порчи числом 0.3

Итак, мы имеем возможность оценить вероятность принятия решения противником решения С и решения Д. Сразу заметим, что если эти вероятности равны, то это тоже самое, как если бы мы бы ничего о них не знали. Это такой ловкий ход теории вероятностей. Математики предложили считать равновероятными возможности в ситуации с полной неопределенностью. Теперь допустим, что есть информация позволяющая определить не равные вероятности. Например, вероятность решения С равна 1/4 , а вероятность решения Д соответственно 3/4. Как вы помните суммарно вероятности, составляющие достоверное событие должны равняться 1. Тогда ожидаемые потери, согласно теории будут выглядеть несколько иначе.

Игрок / Противник	Решение А	Решение В
Решение С	7*1/4 = 1.75	4*1/4 = 1
Решение Д	1*3/4 = 0.75	6*3/4 = 4.5

Заметим, что до знания вероятностей, решение А суммарно давало потери 8 единиц, а решение В – 10 едениц. То есть решение А было выгодней, но не намного. Полученные значения вероятностей дают другую картину. Решение А означает потерю 2,5 единиц, а решение В потерю 5,5 единиц. Теперь решение А выгоднее в два раза. Но распределение вероятностей может быть и другим. Поменяем их на прямо противоположные и посмотрим результат

Игрок / Противник	Решение А	Решение В
Решение С	7*3/4 = 5.25	4*3/4 = 3
Решение Д	1*1/4 = 0.25	6*1/4 = 1/5

И мы видим, что при новом раскладе вероятностей, вариант В становится выгодней. Таким образом, возможность прикинуть шансы того или иного решения противника дает математически более точную оценку стоимости варианта.

Конечно, необходимость оценивать вероятность сильно смущает. Проблема ведь не только в том, что мы должны увидеть неравноценность вариантов принятия решения, мы должны оценить их числом. Предположим, мы согласны, что вариант С более вероятен нежели вариант Д. Однако из каких соображений можно предположить, насколько С более вероятен? Понятно, что информация на которой мы основываемся будет весьма приблизительной, а значит и полученные цифры на самом деле будут приблизительной прикидкой.

Возникает важный вопрос, а можно ли обойти момент оценки вероятностей? Общий подход к ответу на такие вопросы следующий – можно все, дело только в том, чем вы готовы пожертвовать. Очевидно следующее, если мы откажемся от расчета исходных вероятностей, то наша конечная оценка поплывет еще больше. Это действительно так, но давайте все посмотрим, что предлагает математическая теория игры.

Задача линейного программирования

Метод линейного программирования технически более сложен, поэтому я ограничусь концептуальным изложением, без большого количества формул и теорем. Метод предполагает, что мы все-таки можем оценить качество принимаемого решения, то есть можем получить численное значение выигрыша или потерь. И эта оценка должна выражаться строгой математической формулой. Это естественное требование, математика не будет математикой без точных формул. Итак, что из себя представляет формула оценки.

Поясню это на шахматном материале. Допустим, для упрощения, что цена шахматной позиции определяется только наличием материала, то есть уберем все позиционные факторы. Тогда нам необходимо определить стоимость фигур. В этом пункте в дело вступает статистика. Так как фактически никакой строгой теории ценности шахматных фигур нет, то ее можно определить например статистически. Опросим как можно больше высококвалифицированных шахматистов и попросим их дать оценку фигур, например, по 10-ти бальной шкале. Затем усредним результаты по каждой фигуре и полученное число будем считать оценкой. Пусть a_k – это фигура, а p_k – ее оценка. Тогда оценку позиции можно рассчитывать по формуле:

$$P = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n$$

А задача линейного программирования заключается в том, что найти максимум значения Р. Ясно, что максимум достигается при наибольшем количестве фигур, но против Игрока играет сильный Противник и такой абсолютный максимум невозможен. Поэтому, для того, чтобы эта формула имела смысл, необходимо учесть действия Противника. Для дальнейших рассуждений, вернемся к нашей абстрактной игре с двумя решениями Игрока и двумя решениями Противника. Итак, теперь нам неизвестны, вероятности принятия решения Противником того или иного решения. Что можно сказать в такой ситуации.

Во-первых, даже ничего не зная о вероятностях, мы знаем что их сумма равна единице. Возможных решений Противника только 2, в сумме они составляют достоверное решение, а вероятность достоверного решения равна 1, согласно базовому постулату теории вероятностей. Запишем это:

$$p_1 + p_2 = 1$$

Здесь буквой p – обозначена вероятность события. Одно уравнение мы уже имеем. Еще два неравенства можем получить записав, что произойдет при принятии Игроком решения А и решения В. Для решения А получим неравенство:

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 \le v$$

Величина v – это возможные потери, варианта А, которые мы хотели бы минимизировать. Аналогичное неравенство мы может получить для решения В:

$$b_1 p_1 + b_2 p_2 \le v$$

В результате получаем систему из одного уравнения и двух неравенств:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1 \\ a_1 p_1 + a_2 p_2 \le v \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 \le v \end{cases}$$

Здесь неизвестны величины p, а величины a и b, известны из исходной таблицы, это и есть наши ожидаемые потери без учета вероятностей и без попытки эти вероятности оценить методом линейного программирования. Еще немного и мы подойдем к сути метода. Выполним еще одно чисто техническое преобразование. Поделим все выражения системы на v, это полезно для ее упрощения и выполним замену переменных: $x_1 = p_1/v$ и $x_2 = p_2/v$, $L = 1/v$. Получим следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = L \\ a_1x_1 + a_2x_2 \le 1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

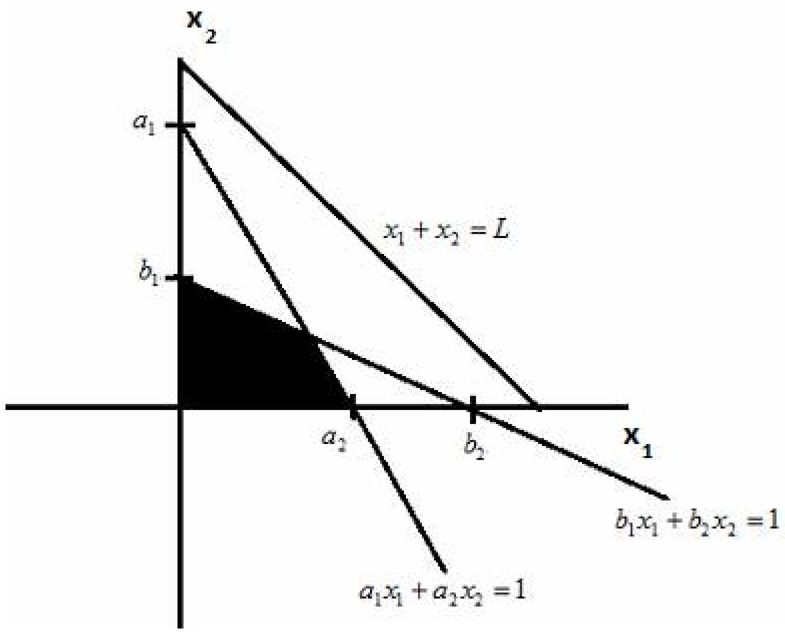
Еще два неравенства добавлены для того, чтобы не забыть, что переменные x_1 и x_2, могут иметь только положительные значения. Осталось понять, как решать эту систему. Сразу извиняюсь перед читателями, не имеющими навыка чтения математических формул. Я обещал обойтись минимумом математики, но это действительно минимум, совсем без формул не получается. А сейчас вам придется еще немного вспомнить, что такое график линейной функции. Выражение вида:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 1$$

описывает прямую линию в системе координат, такую что a_1 и a_2 это отрезки на осях. Тогда в системе неравенств (x_1 – горизонтальная ось и x_2 – вертикальная ось)

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 \le 1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

первое неравенство описывает область, находящуюся ниже линии $a_1x_1 + a_2x_2 = 1$, второе неравенство описывает область находящуюся ниже линии $b_1x_1 + b_2x_2 = 1$, третье неравенство описывает область находящуюся выше горизонтальной оси координат (то есть положительную область), а четвертое описывает область находящую правее вертикальной оси, то есть также положительную область. Изобразим сказанное рисунком



Заштрихованная фигура – это область, являющаяся пересечением четырех областей соответствующих четырем неравенствам. Искомое решение находится где-то в этой области. Это решение ищем из следующих соображений. Точка, изображающая решение, должна находится в черной области и в то же время принадлежать прямой $x_1 + x_2 = L$

Для построения этой прямой заметим, что в силу равенства коэффициентов перед неизвестными (оба коэффициента равны 1) эта прямая отсекает на осях равные отрезки. А так как L неизвестна и ее собственно и надо найти, то это любая прямая отсекающая равные отрезки на осях. Нарисуем любую из таких прямых за пределами черного четырехугольника и начнем ее приближать в нему. Первая точка пересечения прямой с четырехугольником опишет максимальное решение, а если мы будет продолжать сдвиг, к началу координат, то последняя точка, после которой, прямая уйдет из закрашенной области полностью, даст минимальное решение.

Нам нужен максимум, поэтому ограничимся первым пересечением. На рисунке это будет вершина, находящаяся на пересечении двух прямых ограничивающих неравенства. Численное значение L можно найти геометрически, можно алгебраически. Но так как наша статья носит ознакомительный характер, просто примем к сведению, что вычисление L носит технический характер. Теперь вспомним, что L = 1/v. А величина v – это ни что иное, как минимальные потери. А значит зная максимальную величину L мы знаем и величину наиболее вероятных минимальных потерь.

В заключение

Разумеется, в статье дано самое начало теории игр, которая на сегодня имеет очень много ответвлений и много интересных результатов, исследование которых потребует знания уже более изощренного математического аппарата. Замечу только, что базовый постулат – необходимость опоры на вероятность, без исследования причин возникновения этой вероятности остается в силе и для самых современных результатов теории.